

## 具有解析式正解的Stewart衍生型并联机构的位移输入协调关系

叶鹏达, 尤晶晶, 沈惠平, 吴洪涛, 茹煜

引用本文:

叶鹏达, 尤晶晶, 沈惠平, 等. 具有解析式正解的Stewart衍生型并联机构的位移输入协调关系[J]. *光学精密工程*, 2020, 28(1): 151–165.

YE Peng-da, YOU Jing-jing, SHEN Hui-ping, et al. Displacement input coordination of Stewart derivative parallel mechanism with analytical positive solution[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2020, 28(1): 151–165.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.3788/OPE.20202801.0151>

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 基于调整步长牛顿法的Stewart并联机构位置正解

Forward kinematics of Stewart parallel manipulator based on step-adjusting Newton method  
*光学精密工程*. 2018, 26(12): 2982–2990 <https://doi.org/10.3788/OPE.20182612.2982>

### 含有冗余支链的3-RPS/3n-SPS并联机构逆动力学建模

Inverse dynamics modeling of 3-RPS/3n-SPS parallel mechanism with redundant limbs  
*光学精密工程*. 2019, 27(4): 807–819 <https://doi.org/10.3788/OPE.20192704.0807>

### (2PRR)2+R平面并联机构的刚度与固有频率

Stiffness and natural frequency of a (2PRR)2+R planar parallel mechanism  
*光学精密工程*. 2017, 25(11): 2904–2913 <https://doi.org/10.3788/OPE.20172511.2904>

### 基于3-RRR结构的光学元件柔顺微动调整机构的位姿正解

Forward kinematics of 3-RRR flexure parallel mechanism used in lens micro-adjustment  
*光学精密工程*. 2016, 24(6): 1373–1381 <https://doi.org/10.3788/OPE.20162406.1373>

### 基于牛顿-欧拉法的4-UPS-UPU并联机构动力学方程

Dynamic equation of 4-UPS-UPU parallel mechanism based on Newton-Euler approach  
*光学精密工程*. 2015, 23(11): 3129–3137 <https://doi.org/10.3788/OPE.20152311.3129>

文章编号 1004-924X(2020)01-0151-16

# 具有解析式正解的 Stewart 衍生型并联机构的位移输入协调关系

叶鹏达<sup>1</sup>, 尤晶晶<sup>1,2\*</sup>, 沈惠平<sup>3</sup>, 吴洪涛<sup>2,4</sup>, 茹煜<sup>1</sup>

- (1. 南京林业大学 机械电子工程学院, 江苏 南京 210037;
2. 江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 江苏 南京 210016;
3. 常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213016;
4. 南京航空航天大学 机电学院, 江苏 南京 210016)

**摘要:**针对 6 自由度冗余驱动并联机构实时控制较难的问题,以具有解析式正解的 Stewart 衍生拓扑构型为研究对象,研究了位移输入的协调关系。通过设计二重复合球铰链和可转换主动、从动模式的移动副,实现了 6 种不同冗余度的低耦合驱动模式。根据动平台上 4 个位置点之间的尺度约束关系,构建了一种正向运动学全解析算法,验证了位姿正解模型的正确性。推导化简了位移输入的 6 个协调方程,分别运用 Newton-Raphson 法和 Broyden 法得到了协调方程的数值解,对比结果发现,Broyden 法的计算时间约为 Newton-Raphson 法的 78%,Newton-Raphson 法的精度优于 Broyden 法至少 3 倍。从许可初值偏差和结构参数两个方面研究了各种驱动模式对冗余协调算法的影响,结果表明,随着动平台边长的增大以及移动副初始长度的减小,冗余协调算法允许有更大的许可初值偏差。进一步地,基于区间分析理论引入并定义扰动适应性评价指标,计算出本机构的最佳冗余度为 5,并且得出 Broyden 法的综合扰动适应性能优于 Newton-Raphson 法的 1.27 倍。最后,结合数值性态给出了 Stewart 衍生型并联机构移动副驱动模式优选的 3 点选取原则。研究方案可为 6 自由度冗余驱动并联机构的结构模型优化及实时控制提供参考依据。

**关键词:**并联机构;位姿正解;协调方程;结构参数;许可初值偏差

**中图分类号:**TH112 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20202801.0151

## Displacement input coordination of Stewart derivative parallel mechanism with analytical positive solution

YE Peng-da<sup>1</sup>, YOU Jing-jing<sup>1,2\*</sup>, SHEN Hui-ping<sup>3</sup>, WU Hong-tao<sup>2,4</sup>, RU Yu<sup>1</sup>

- (1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China;
2. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology, Nanjing 210016, China;
3. Research Center of Advanced Mechanism, Changzhou University, Changzhou 213016, China;
4. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

\* Corresponding author, E-mail: youjingjing251010@126.com

收稿日期:2019-09-23;修订日期:2019-10-29.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51405237);国家留学基金资助(No. 201908320035)

**Abstract:** Aiming at the difficulty of real-time control of 6-DOF redundantly actuated parallel mechanism, the coordinated relation of displacement input was studied for Stewart derivative topological configuration with analytical positive solution. Six low-coupling driving modes with different redundancy were realized by designing double composite spherical pair and convertible master-slave output prismatic pair. According to the scale constraints between the four positions on the moving platform, a forward kinematics algorithm with whole analytical solutions was constructed, and the correctness of the forward displacement solution model was verified. Six compatibility equations of displacement input were derived and simplified. The numerical solutions of the compatibility equations were obtained by using Newton-Raphson method and Broyden method respectively. The comparison results show that the computing time of Broyden method is about 78% of that of Newton-Raphson method and the accuracy of Newton-Raphson method is at least three times higher than that of Broyden method. The influence of various driving modes on the redundant coordination algorithm was studied from two aspects of admissible initial deviations and structural parameters. The results show that the redundant coordination algorithm has larger admissible initial deviations with the increase of the side length of the moving platform and the decrease of the initial length of the prismatic pair. Furthermore, introducing and defining the perturbation adaptive performance evaluation index based on interval analysis theory, the optimal redundancy of the mechanism is calculated to be 5 and the comprehensive perturbation adaptive performance of Broyden method is 1.27 times better than Newton-Raphson method. Finally, combined with the numerical performance, the three selection principles for the driving mode optimization of the Stewart derivative parallel mechanism is given. The research scheme can provide reference for structure model optimization and real-time control of 6-DOF redundantly actuated parallel mechanism.

**Key words:** parallel mechanism; forward displacement solution; compatibility equation; structural parameter; admissible initial deviation

## 1 引 言

1965年, STEWART首次提出含6条相同支链的机构,学者们称其为Stewart并联机构<sup>[1]</sup>。相比于串联机构,并联机构具有输出精度高、结构刚性好和承载能力强等优点,成为国内外机构学研究热点<sup>[2-3]</sup>。目前,大多数6自由度并联机构都是基于Stewart并联机构衍生而来,我们称之为Stewart衍生型并联机构,其在光学元器件、并联机床和六维加速度传感器等领域得到越来越多的应用<sup>[4]</sup>。

然而,由于拓扑构型较复杂,6自由度并联机构的精确实时控制一般很难实现。有研究发现<sup>[5-7]</sup>,基于并联机构的装置性能主要与其正向运动学问题有关。正向运动学的研究方法主要有解析法和数值法两种<sup>[8-9]</sup>。解析法主要包括消元法、Grobner基法和共形几何代数等方法。文献<sup>[10]</sup>基于计算机符号运算,利用矢量消元和Sylvester

结式消元,得出一般6-4台体型Stewart并联机构位置正解的一元32次方程;文献<sup>[11]</sup>运用计算机代数系统中的分次字典序Grobner基算法,获得一般6-6平台型Stewart并联机构位置正解的一元20次方程且该机构最多有40组解的结论;文献<sup>[12]</sup>基于共形几何代数建立运动学方程,并通过构造9阶Sylvester结式,得到一般6-6台体型Stewart并联机构位置正解的一元40次方程。不难看出,这些方法最终都将并联机构位置正解表达为一个一元高次代数方程,其优点是得到全部解,但消元和推导过程繁琐,技巧性强,且计算量大,特别是针对台体型Stewart并联机构。数值法是另一种求解并联机构正向运动学的方法,主要运用Newton-Raphson法(N-R法)等数值逼近迭代思路求解非线性方程组。文献<sup>[13]</sup>针对6-6平台型Stewart并联机构提出了利用位置反解逐步迭代的方法求解位置正解的思路,保证了实时性,但每次只能迭代计算一组解;文献<sup>[14]</sup>

针对 6-3 Stewart 平台结构提出了一种基于机构简化的位置正解数值方法,保证了实时性,但对机构结构具有一定的依赖性。不难看出,并联机构拓扑结构变得复杂时,数值法对于精确解的收敛性较差<sup>[15-17]</sup>。文献[18]引入传感器提高了模型算法的收敛性,但由于引入传感器而造成结构上的复杂性,最终对算法的收敛性并没有很大帮助。

考虑到并联机构位置正解的求解难度与机构耦合度指标有关<sup>[19]</sup>,并且冗余驱动具有减少奇异位形和增加有效工作空间等优点<sup>[20]</sup>,文献[21]提出了一种低耦合度冗余驱动 Stewart 衍生拓扑构型,由于尚未有与之相匹配的二重复合球铰链,因而限制了其结构模型的设计。鉴于此,本文设计了二重复合球铰链。除此之外,还设计了可转换主动、从动模式的移动副,该移动副可用于改变机构的冗余度,实现变冗余驱动。

冗余驱动是指机构的驱动副数目大于自由度数。进一步分析发现,由于冗余驱动涉及到运动副的输入协调关系,一方面可能存在因驱动力分配不当而产生内力较大的现象,另一方面可能由于移动副位移输入不协调而造成机构的损坏。因此,有必要从这两方面进行深入的研究,通过协调机构内力或者协调移动副位移来确保机构运行的可靠性。文献[2]提出了一类含冗余支链的 3-RPS/3n-SPS 并联机构,从各分支作用力与运动平台位姿误差间的协调关系出发,建立了机构的动力学补充方程,研究了机构各个构件受力变形量与运动平台末端位姿误差之间的关系;文献[20]为了解决冗余驱动并联机构的驱动协调问题,以 6 PUS+UPU 并联机构为研究对象,提出了一种驱动力同步协调控制策略;文献[22]针对 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机构,以降低内力为目标,提出了一种基于冗余驱动变刚度的协调内力的方法;文献[23]提出了一种含 9 个驱动副的 6 自由度空间冗余并联机构,基于实时冗余求解算法设计了一种逆动力学控制策略,减少了机构的奇异位形,并且降低了各支链间的内力;文献[24]基于 Gough-Stewart 平台提出了一种冗余度(机构驱动副数目超过自由度的数目)为 3 的并联机构,推导了机构有关杆长的约束方程,基于机构的力传递矩阵导出了最大驱动力的计算公式,将最大驱动力与最大有效载荷的比值定义为最大

许可力指标值,这为冗余驱动并联机构的设计和应用提供参考。

从以上分析可以看出,目前针对冗余驱动并联机构的研究主要集中在机构内力协调,而对于移动副位移协调以及驱动模式优选方面的研究还较少,并且大多数研究的机构都是具有确定的冗余度,而对于变冗余度机构的研究相对较少。本文推导并化简了 6 个位移输入协调方程,为了便于对其进行验证,重新推导出机构的位置正解;然后,分别运用 N-R 法和 Broyden 法求解了协调方程;进一步研究不同冗余度对冗余协调算法数值结果的影响;最后,总结出冗余驱动模式优选的 3 点选取原则。

## 2 结构模型及正向运动学

### 2.1 结构模型

Stewart 衍生型并联机构的结构模型和拓朴构型分别如图 1 和图 2 所示。该机构由 1 个边长为  $2(n+L)$  的静平台、1 个边长为  $2n$  的动平台、6 个二重复合球铰链、12 个可转换主动、从动模式的移动副和 12 个一般球铰链组成。12 个一般球铰链与静平台相连,6 个二重复合球铰链与动平台相连。初始状态下,静平台与动平台的中心重合,并且姿态相同。当驱动  $N(6 \leq N \leq 11)$  个移动副时,动平台的位置和姿态发生变化,从而实现动平台的六维运动。

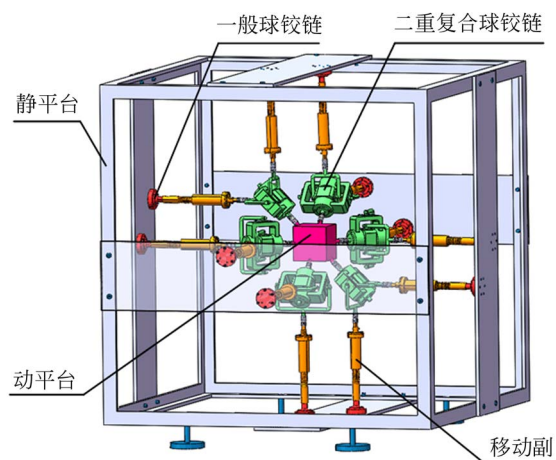


图 1 Stewart 衍生型并联机构结构模型

Fig. 1 Structure model of Stewart derivative parallel mechanism

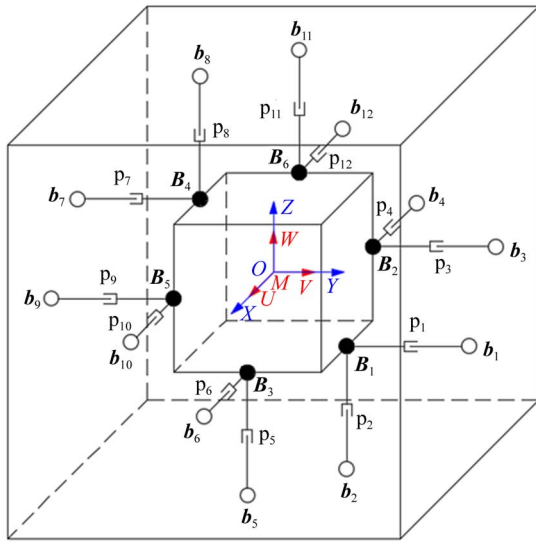


图 2 Stewart 衍生型并联机构拓扑构型

Fig. 2 Topological configuration of Stewart derivative parallel mechanism

如图 3 所示,为了降低机构的耦合度,设计了一种二重复合球铰链<sup>[25]</sup>,其主要由第一层铰链、第二层铰链和中心柱组成。第一层铰链由第一套筒、内叉和第一滑柱组成,第二层铰链由第二套筒、外叉和第二滑柱组成。中心柱与动平台相连,滑柱与移动副相连,两层铰链均具有 3 条互相垂直的转动轴线,并且转动轴线始终相交于点  $B_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ )。

如图 4 所示,为了改变机构的冗余度,设计了一种可转换主动、从动模式的移动副<sup>[26]</sup>,其主要由导杆、内套筒、外套筒和转换套筒组成。导杆与内套筒之间滑动连接,内套筒与外套筒之间通过螺纹连接。当转换套筒和导杆通过螺栓螺母连接在一起时,随着内、外套筒之间发生相对转动,移动副的长度也发生改变,此时,该移动副处于主动模式;当拆掉螺栓螺母时,导杆与转换套筒分离,内套筒与导杆之间可相对滑动,此时,该移动副处于从动模式。

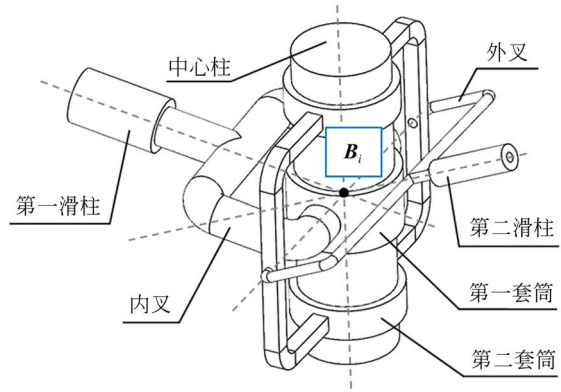


图 3 二重复合球铰链结构模型

Fig. 3 Structure model of double composite spherical pair

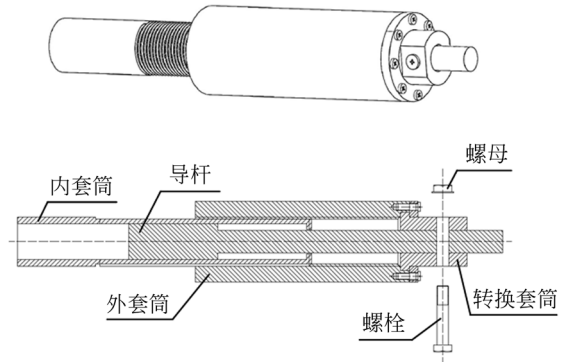


图 4 移动副的三维图和剖面图

Fig. 4 Three dimensional graph and profile of the prismatic pair

### 2.2 正向运动学

并联机构的正向运动学是指:已知驱动副的输入量,求解动平台的输出运动参数。惯性坐标系  $\{O-XYZ\}$  与静平台相连,动坐标系  $\{M-UVW\}$  与动平台相连,如图 2 所示,惯性坐标系的坐标原点位于初始状态下的动平台中心处。12 个一般球铰链中心点在惯性坐标系中的笛卡尔坐标可表示成矩阵形式:

$$[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -n & -n-L & n & n+L & 0 & 0 & n & n+L & -n & -n-L \\ n+L & n & n+L & n & 0 & 0 & -n-L & -n & -n-L & -n & 0 & 0 \\ -n & -n-L & 0 & 0 & -n-L & -n & n & n+L & 0 & 0 & n+L & n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{b}_1 \sim \mathbf{b}_{12}$  为同名点的几何中心在惯性系内的笛卡尔坐标;  $n$  为动平台半边长;  $L$  为移动副初始长度。

12 个移动副长度可表示为:

$$\begin{cases} |\mathbf{B}_i - \mathbf{b}_{2i}| = l_{2i} \\ |\mathbf{B}_i - \mathbf{b}_{2i-1}| = l_{2i-1} \end{cases}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{B}_i$  为同名点的几何中心在惯性系内的笛卡尔坐标;  $|\cdot|$  为矢量的模。

点  $\mathbf{M}$  为动平台的几何中心, 根据机构拓扑构型并且运用立体几何知识可得出  $\mathbf{M}$  点与  $\mathbf{B}_i$  点之间满足如下的关系:

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_6 = 2\mathbf{M}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{M} = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3, \quad (4)$$

$$|\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}| = |\mathbf{B}_2 - \mathbf{M}| = |\mathbf{B}_3 - \mathbf{M}| = \sqrt{2}n. \quad (5)$$

为了便于计算, 选取  $\mathbf{M}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  和  $\mathbf{B}_3$  4 个点为待求量:

$$[\mathbf{M}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3] = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

根据 12 个移动副的长度约束关系并结合式 (5), 建立动平台输入、输出量之间的位姿映射方程组。进一步分析后发现, 同构方程两两相减, 能够消去二次项, 得到 4 组线性封闭方程:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8L} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2^2 - l_1^2 + l_7^2 - l_8^2 \\ l_5^2 - l_6^2 - l_{11}^2 + l_{12}^2 \\ l_4^2 - l_3^2 + l_9^2 - l_{10}^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} (l_2^2 - l_1^2)/2L \\ nz_0 - (n+L)y_0 + (l_1^2 + l_7^2)/4 - h_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} (l_4^2 - l_3^2)/2L \\ nx_0 - (n+L)y_0 + (l_3^2 + l_9^2)/4 - h_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} (l_5^2 - l_6^2)/2L \\ nx_0 - (n+L)z_0 - (l_5^2 + l_{11}^2)/4 + h_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中:

$$h_1 = \frac{1}{L+2n} \begin{bmatrix} L+n & 1 \\ n & -1 \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{2} + \frac{3n^2}{2} + \frac{(n+L)^2}{2}$$

再结合式 (4), 得到剩余 3 个未知量的解析式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_3 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

至此, 重新推导了新型并联机构的正向运动学, 具体算法流程如图 5 所示。

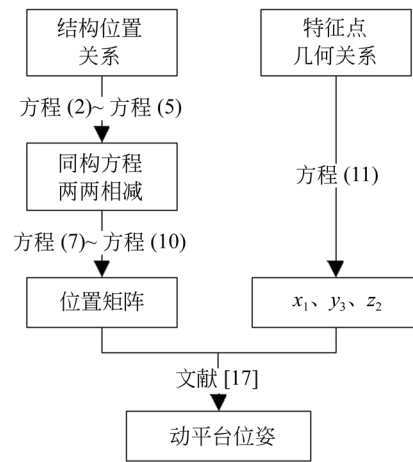


图 5 位姿正解算法流程图

Fig. 5 Algorithm flow chart of forward displacement solution

为了验证位姿正解模型的正确性, 在 Mathematica 中构建了 Stewart 衍生型并联机构的虚

拟样机,如图 6 所示。其中,动平台半边长  $n$  和移动副初始长度  $L$  分别设置为 15 mm 和 25 mm。虚拟仿真中,动平台为刚体,并且不考虑球面副、移动副的摩擦和间隙。不失一般性,取机构的初始状态和任意状态进行仿真,计算结果如表 1 所示。结果显示,位姿正解的计算值与准确值完全一致。

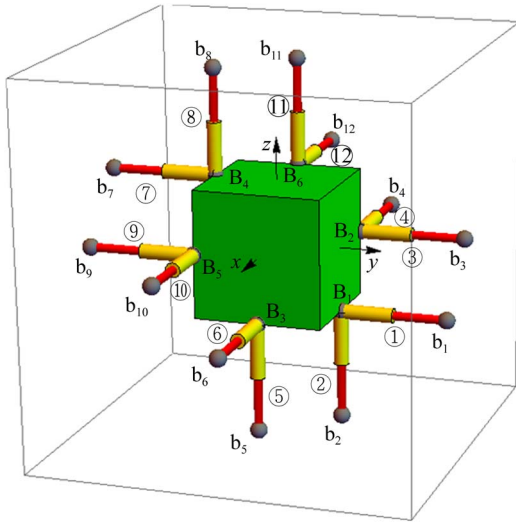


图 6 Stewart 衍生型并联机构的虚拟样机

Fig. 6 Virtual prototype of Stewart derivative parallel mechanism

表 1 位姿正解模型验证

Tab. 1 Validation of forward displacement solution model

| 正解<br>位置点 | 初始状态/mm |     | 任意状态/mm |         |
|-----------|---------|-----|---------|---------|
|           | 准确值     | 计算值 | 准确值     | 计算值     |
| $x_0$     | 0       | 0   | 1.990   | 1.990   |
| $y_0$     | 0       | 0   | -1.680  | -1.680  |
| $z_0$     | 0       | 0   | 2.300   | 2.300   |
| $x_1$     | 0       | 0   | 2.369   | 2.369   |
| $y_1$     | 15      | 15  | 9.968   | 9.968   |
| $z_1$     | -15     | -15 | -15.425 | -15.425 |
| $x_2$     | -15     | -15 | -9.811  | -9.811  |
| $y_2$     | 15      | 15  | 15.892  | 15.892  |
| $z_2$     | 0       | 0   | 0.901   | 0.901   |
| $x_3$     | 15      | 15  | 14.169  | 14.169  |
| $y_3$     | 0       | 0   | -7.605  | -7.605  |
| $z_3$     | -15     | -15 | -14.027 | -14.027 |

### 3 协调方程的推导及求解

#### 3.1 协调方程的推导

将动平台视作刚性结构,运动过程中位置点之间的相对距离保持不变。由并联机构结构模型可知,移动副长度与位置点之间的尺度约束关系满足如下关系式:

$$|\mathbf{B}_1 - \mathbf{b}_1|^2 = x_1^2 +$$

$$[y_1 - (n+L)]^2 + (z_1 + n)^2 = l_1^2, \quad (12)$$

$$|\mathbf{B}_2 - \mathbf{b}_3|^2 = (x_2 + n)^2 +$$

$$[y_2 - (n+L)]^2 + z_2^2 = l_3^2, \quad (13)$$

$$|\mathbf{B}_3 - \mathbf{b}_5|^2 = (x_3 - n)^2 +$$

$$y_3^2 + [z_3 + (n+L)]^2 = l_5^2, \quad (14)$$

$$|\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}|^2 = (x_1 - x_0)^2 +$$

$$(y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = 2n^2, \quad (15)$$

$$|\mathbf{B}_2 - \mathbf{M}|^2 = (x_2 - x_0)^2 +$$

$$(y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 = 2n^2, \quad (16)$$

$$|\mathbf{B}_3 - \mathbf{M}|^2 = (x_3 - x_0)^2 +$$

$$(y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2 = 2n^2, \quad (17)$$

$$|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 -$$

$$2y_1y_2 + y_2^2 + z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 = 2n^2, \quad (18)$$

$$|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_3|^2 = x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + y_2^2 - 2y_2y_3 +$$

$$y_3^2 + z_2^2 - 2z_2z_3 + z_3^2 = 6n^2, \quad (19)$$

$$|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_3|^2 = x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + y_1^2 - 2y_1y_3 +$$

$$y_3^2 + z_1^2 - 2z_1z_3 + z_3^2 = 2n^2. \quad (20)$$

将式(7)~式(11)代入式(12)~式(20),发现方程的最高次数达到 8 次,并且方程中所含高次项的项数也较多。为了降低方程的次数以及减少方程中高次项的项数,通过式(12),式(15)相减、式(13),式(16)相减、式(14),式(17)相减、式(12),式(13),式(18)相减、式(13),式(14),式(19)相减、式(12),式(14),式(20)相减,得到如下 6 个位移输入协调方程:

$$f(\mathbf{X}) = 2x_1x_0 + 2y_1y_0 + 2z_1z_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 3n^2 + (n+L)^2 - 2y_1(n+L) + 2z_1n - l_1^2 = 0, \quad (21)$$

$$g(\mathbf{X}) = 2x_2x_0 + 2y_2y_0 + 2z_2z_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 3n^2 + (n+L)^2 - 2y_2(n+L) + 2x_2n - l_3^2 = 0, \quad (22)$$

$$v(\mathbf{X}) = 2x_3 x_0 + 2y_3 y_0 + 2z_3 z_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 3n^2 + (n+L)^2 + 2z_3(n+L) - 2x_3 n - l_5^2 = 0, \quad (23)$$

$$u(\mathbf{X}) = -2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 - 2z_1 z_2 - 2x_2 n + 2y_2(n+L) - 2n^2 - 2(n+L)^2 + 2y_1(n+L) - 2z_1 n - (2n^2 - l_1^2 - l_3^2) = 0, \quad (24)$$

$$w(\mathbf{X}) = -2x_2 x_3 - 2y_2 y_3 - 2z_2 z_3 - 2x_2 n + 2y_2(n+L) - 2n^2 - 2(n+L)^2 - 2z_3(n+L) + 2x_3 n - (6n^2 - l_3^2 - l_5^2) = 0, \quad (25)$$

$$h(\mathbf{X}) = -2x_1 x_3 - 2y_1 y_3 - 2z_1 z_3 - 2z_3(n+L) + 2x_3 n - 2n^2 - 2(n+L)^2 + 2y_1(n+L) - 2z_1 n - (2n^2 - l_1^2 - l_5^2) = 0. \quad (26)$$

将式(7)~式(11)代入式(21)~式(26)可知,消除了式(21)、式(22)、式(23)中的 8 次方项以及式(24)、式(25)、式(26)中的 6 次方项。化简前后的协调方程对比如表 2 所示。

表 2 化简前后的协调方程对比

Tab.2 Comparison of the compatibility equations before and after simplification

| 方程特征项 | 化简前 | 化简后 |
|-------|-----|-----|
| 数目    | 9   | 6   |
| 最高次数  | 8   | 8   |
| 最高次项数 | 45  | 9   |

为了验证协调方程的正确性,并联机构结构参数与 2.2 节中的参数一致,在 Mathematica 中仿真对比了 6 个协调方程在两种不同状态下的计算结果。表 3 列出了两种状态下协调方程的计算误差,将 6 个协调方程误差的平均值作为综合误差。误差  $\delta$  的表达式为:

$$\delta = | \mathbf{F}(\mathbf{X})^* - \mathbf{F}(\mathbf{X})_* |, \quad (27)$$

其中:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) =$$

$$[f(\mathbf{X}) \quad g(\mathbf{X}) \quad v(\mathbf{X}) \quad u(\mathbf{X}) \quad w(\mathbf{X}) \quad h(\mathbf{X})]^T$$

式中:上标“\*”代表仿真结果;下标“\*”代表准确结果; $\mathbf{X}$ 为从动副长度。

由表 3 可知,当移动副位于初始状态时,计算结果没有产生误差;当移动副位于任意状态时,计算结果产生较小误差,该误差可能是由计算机浮点运算中的舍入误差和泰勒展开时的截断误差等因素造成,可以忽略不计。计算结果表明协调方程推导正确。

表 3 协调方程的误差统计

Tab.3 Error statistics of the compatibility equations

| 误差         | 初始状态/mm | 任意状态/mm                   |
|------------|---------|---------------------------|
| $\delta_1$ | 0       | $4.54747 \times 10^{-13}$ |
| $\delta_2$ | 0       | $6.82121 \times 10^{-13}$ |
| $\delta_3$ | 0       | $4.54747 \times 10^{-13}$ |
| $\delta_4$ | 0       | $2.27374 \times 10^{-13}$ |
| $\delta_5$ | 0       | $4.54747 \times 10^{-13}$ |
| $\delta_6$ | 0       | $3.12639 \times 10^{-13}$ |
| 综合误差       | 0       | $4.31063 \times 10^{-13}$ |

### 3.2 协调方程的求解

并联机构 12 个移动副之间满足一定的位移输入协调关系,由于协调方程的次数均高于 4 次,给定 N 个驱动副长度,可通过数值方法计算出其它(12-N)个从动副长度。求解非线性方程组的数值方法主要包括不动点迭代法、牛顿法和拟 Newton 方法等方法,本文选择其中的 N-R 法和 Broyden 法进行求解,其它方法将另文研究。

#### 3.2.1 N-R 法

N-R 法是求解非线性方程组的经典方法,因其收敛速度快和自校正等优点,得到了广泛的应用。目前很多新的算法都是在此基础上改进而来。

协调方程可以表示为:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0. \quad (28)$$

泰勒公式展开:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) +$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) + O(|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k|^2) = 0,$$

$$(29)$$

其中:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{X}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial l_6} \\ \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial l_6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial l_6} \end{bmatrix}$$

式中： $k$  为迭代步数； $\mathbf{F}'(\mathbf{X}_k)$  为 Jacobian 矩阵。

忽略二阶无穷小量可得到：

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - [\mathbf{F}'(\mathbf{X}_k)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}_k). \quad (30)$$

式(30)即为 N-R 法的迭代公式。N-R 法是局部收敛的，只要初值选取得当，计算结果总能收敛到合理值。N-R 法求解协调方程的算法流程如图 7 中实线所示。

### 3.2.2 Broyden 法

Broyden 法是基于改进的 N-R 法发展而来，是求解非线性方程组的重要方法之一。它克服了 N-R 法需要求导、求逆等缺点，将 Jacobian 矩阵简化为矩阵递推关系式，这样不仅简化了计算过程，同时还能保证方法的超线性收敛速度<sup>[27]</sup>。当然，在改进的 N-R 法成立的前提下，Broyden 法是计算修正矩阵  $\Delta \mathbf{A}_k$  的一种方法，其它方法还包括 Broyden 第二方法、DFP 秩 2 算法和 BFGS 秩 2 算法等。

Broyden 首先对改进的 N-R 法提出了一种修正  $\mathbf{A}_k$  的计算方案，它每步迭代只需计算  $n$  个分量函数值及  $O(n^2)$  次算术运算，大大降低了计算量，其迭代公式为：

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{A}_0 = \mathbf{F}'(\mathbf{X}_0), k = 0 \\ \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k}, k > 0 \end{cases}, \quad (31)$$

其中：

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{k+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_k).$$

从表面上看求解非线性方程组需要  $O(n^3)$  次运算量，但实际上可以通过 Sherman-Morrison 引理使其运算量降低为  $O(n^2)$ 。在式(31)中，若  $\mathbf{A}_k^{-1}$  存在，令  $\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k^{-1}$ ，则  $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1}^{-1}$ ，于是式(31)可改写为逆 Broyden 秩 1 公式：

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{S}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k) \mathbf{S}_k^T \mathbf{B}_k}{\mathbf{S}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k}, \end{cases} \quad (32)$$

式中： $\mathbf{S}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k \neq 0$ 。逆 Broyden 秩 1 公式每步总计算量为  $n$  个分量函数值和  $O(n^2)$  次算术运算。

式(32)即为 Broyden 法的迭代公式。Broyden 法求解协调方程的算法流程如图 7 中虚线所示。

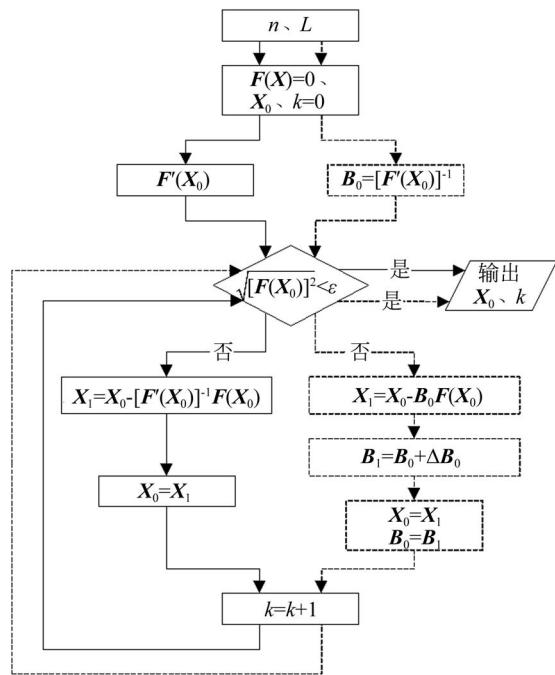


图 7 两种迭代算法流程图

Fig. 7 Flow chart of the two iterative algorithms

观察图 7 可以发现，与 N-R 法相比，Broyden 法在迭代过程中不需要计算 Jacobian 矩阵，而是用当前函数值代替导数，避免了每次迭代过程中的求导，降低了计算量。

为了对比数值结果的精度和效率，将两种算法编写成 Mathematica 程序，并在软件中通过 Timing 指令获取算法的计算时间。不失一般性，任意给定动平台一组位姿： $x_0 = 0.5 \text{ mm}$ ， $y_0 = 0 \text{ mm}$ ， $z_0 = 0 \text{ mm}$ ； $\lambda_1 = -0.05$ ， $\lambda_2 = 0.05$ ， $\lambda_3 = 0.05$ ，迭代精度控制为  $1.0 \times 10^{-6}$ ，仿真结果如表 4 所示。表 5 列出了许可初值偏差从 20% 变化到 25% 时，计算结果收敛到给定位姿所运行的迭代步数和计算时间。

表 4 协调方程数值结果精度对比

Tab. 4 Accuracy comparison of numerical results of the compatibility equations

| 未知量   | 算法      | 准确值/mm                 | 计算值/mm                 | 相对误差/%                  |
|-------|---------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| $l_1$ | N-R     | 26.865 023 577 927 797 | 26.865 023 577 541 393 | $1.438 \times 10^{-9}$  |
|       | Broyden | 26.865 023 577 927 797 | 26.865 023 587 874 997 | $3.703 \times 10^{-8}$  |
| $l_2$ | N-R     | 23.922 647 230 267 636 | 23.922 647 230 455 837 | $7.867 \times 10^{-10}$ |
|       | Broyden | 23.922 647 230 267 636 | 23.922 647 229 554 58  | $2.981 \times 10^{-9}$  |
| $l_3$ | N-R     | 26.585 688 937 020 32  | 26.585 688 936 638 01  | $1.438 \times 10^{-9}$  |
|       | Broyden | 26.585 688 937 020 32  | 26.585 688 945 824 863 | $3.312 \times 10^{-8}$  |
| $l_4$ | N-R     | 24.132 186 285 482 295 | 24.132 186 285 650 615 | $6.975 \times 10^{-10}$ |
|       | Broyden | 24.1321 862 854 822 95 | 24.132 186 281 266 73  | $1.747 \times 10^{-8}$  |
| $l_5$ | N-R     | 23.605 347 167 902 86  | 23.605 347 168 051 64  | $6.303 \times 10^{-10}$ |
|       | Broyden | 23.605 347 167 902 86  | 23.605 347 165 790 896 | $8.947 \times 10^{-9}$  |
| $l_6$ | N-R     | 26.108 405 854 360 477 | 26.108 405 854 083 458 | $1.061 \times 10^{-9}$  |
|       | Broyden | 26.108 405 854 360 477 | 26.108 405 859 951 2   | $2.141 \times 10^{-8}$  |

表 5 协调方程数值结果效率对比

Tab. 5 Efficiency comparison of numerical results of the compatibility equations

| 许可初值<br>偏差/% | N-R      |       | Broyden  |       |
|--------------|----------|-------|----------|-------|
|              | 迭代<br>步数 | 时间/ms | 迭代<br>步数 | 时间/ms |
| 20           | 5        | 187.5 | 10       | 156.3 |
| 21           | 5        | 203.1 | 10       | 156.3 |
| 22           | 5        | 203.1 | 11       | 156.3 |
| 23           | 5        | 203.1 | 11       | 156.3 |
| 24           | 6        | 218.8 | 11       | 171.9 |
| 25           | 6        | 250.0 | 12       | 187.5 |
| 平均值          | 5.3      | 210.9 | 10.8     | 164.1 |

观察并分析表 4,5 可知, N-R 法数值结果的精度优于 Broyden 法至少 3 倍,但效率较低。从迭代步数和计算时间可以看出,在相同许可初值偏差情况下,虽然 Broyden 法收敛到满足精度要求的给定位姿所运行的迭代步数较多,但由于每一步迭代不需要构造 Jacobian 矩阵,因此计算量较少,计算时间仅为 N-R 法的 78%左右。

将两种算法的许可初值偏差均取为 30%,其迭代收敛性如图 8 所示,其中综合杆长表示计算杆长的平均值。为了更清晰地反映两种算法的收

敛性,选取图中计算值与准确值较接近的部分曲线进行局部放大。从图 8 中可以看出,使用 Broyden 法计算得到的杆长收敛曲线围绕准确值的扰动较小,并且在迭代步数达到 4 步时,计算值与准确值基本吻合。因此,Broyden 法的收敛速度较快,即收敛性较优。

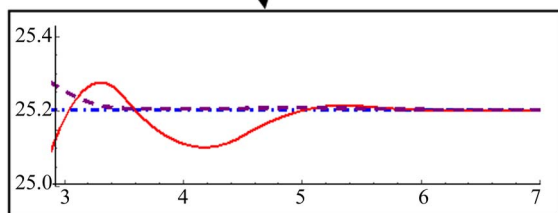
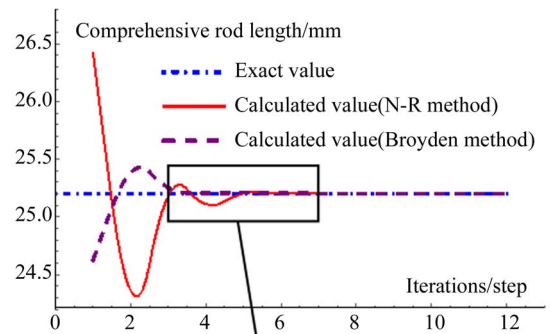


图 8 两种迭代算法的收敛性

Fig. 8 Convergence of the two iterative algorithms

### 4 协调方程数值结果的影响因素

通过切换移动副的工作模式,从而改变机构的冗余度,实现 6 种驱动模式,如图 9 所示,其中  $R$  代表机构的冗余度。协调方程数值结果的影响因素主要包括许可初值偏差和并联机构结构参数,针对各种驱动模式,分别对比分析这两者对冗余协调算法的影响。

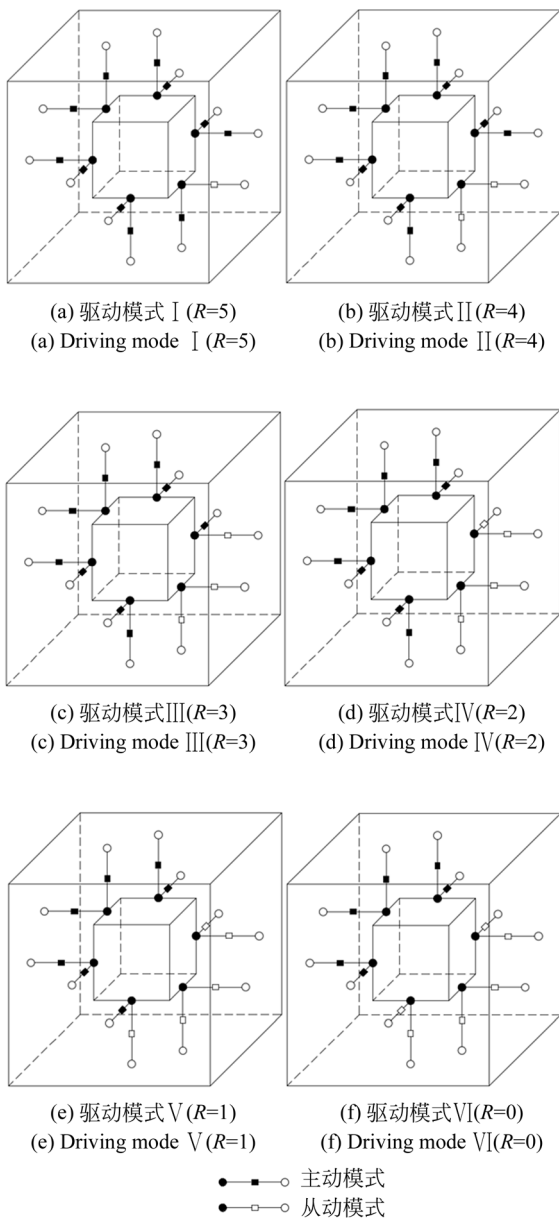


图 9 6 种驱动模式  
Fig. 9 Six driving modes

### 4.1 许可初值偏差

N-R 法和 Broyden 法在计算协调方程时都需要给定算法迭代初值,如果初值选取不当,就会造成计算结果发散,失去有效性。并联机构结构参数与 2.2 节中的参数一致,分别给定算法迭代精度为  $1.0 \times 10^{-6}$  与  $1.0 \times 10^{-9}$ ,仿真结果如图 10 和图 11 所示。本文以一组结构参数为例,给出了确定最佳冗余度的方法和思路,为类似并联机构驱动模式的选取提供参考。

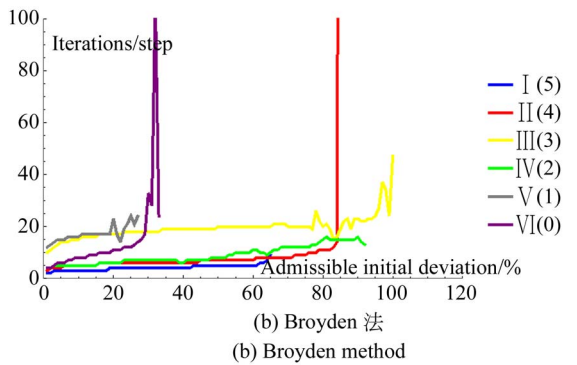
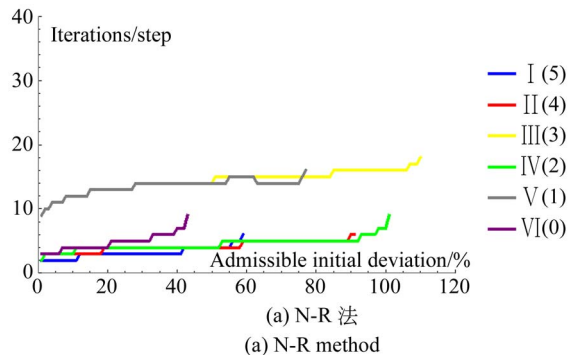
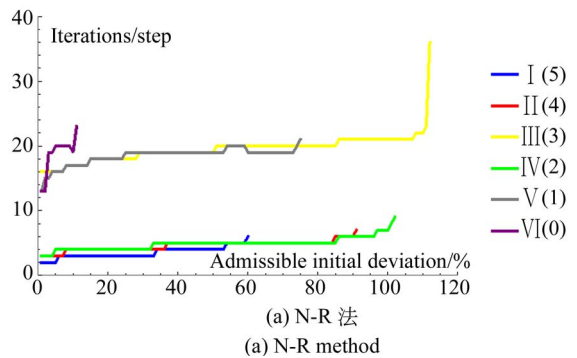


图 10 许可初值偏差与迭代步数的关系( $1.0 \times 10^{-6}$ )  
Fig. 10 Relationship between admissible initial deviations and iterations( $1.0 \times 10^{-6}$ )



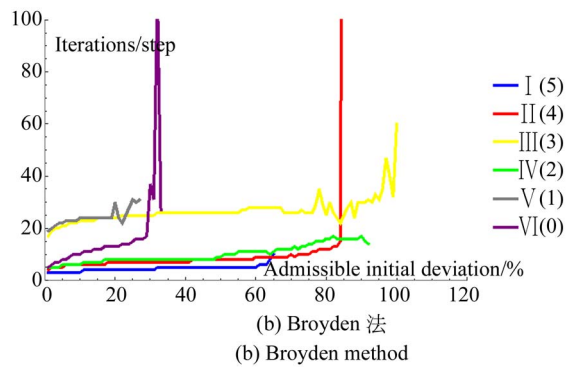


图 11 许可初值偏差与迭代步数的关系( $1.0 \times 10^{-9}$ )  
Fig. 11 Relationship between admissible initial deviations and iterations( $1.0 \times 10^{-9}$ )

观察并分析图 10 和图 11 可知:

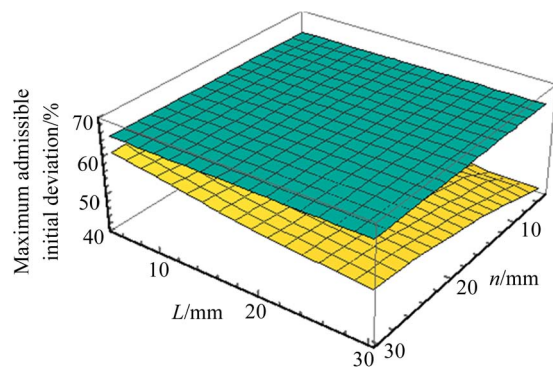
(1)随着许可初值偏差的增大和迭代精度的提高,迭代步数呈上升趋势。 $R=3$  时,冗余协调算法对初值的依赖程度较低; $R=1$  时,Broyden 法对初值的依赖程度较高; $R=5$  时,迭代步数都较低,即实时性较优。

(2)冗余度为 0,1,3 时,迭代步数对迭代精度的敏感程度都较高;特别地,对于 N-R 法,当  $R=0$  时,迭代步数对迭代精度较敏感,并且对许可初值偏差的要求较高,究其原因,这可能是由于 Jacobian 矩阵维数的增加导致计算量变大,以及更易产生奇异等原因造成的。

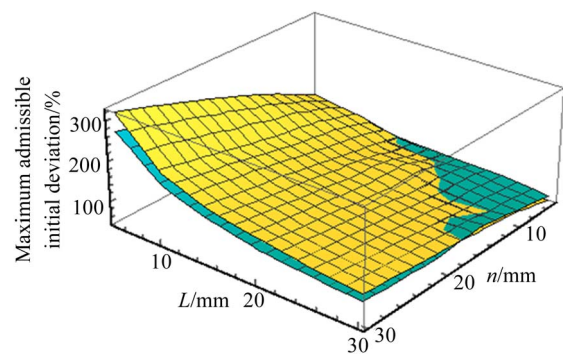
(3)随着许可初值偏差的增大,N-R 法的迭代步数变化较平缓,即稳定性较优,而对于 Broyden 法,当许可初值偏差接近最大许可初值偏差时,迭代步数产生较大波动,从波动的整个趋势来看,呈上升态势。

#### 4.2 结构参数

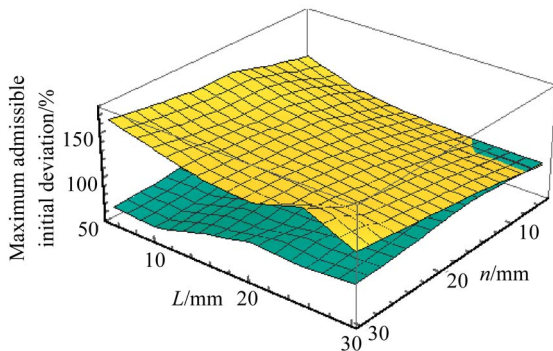
对于不同的驱动模式,冗余协调算法的最大许可初值偏差与并联机构结构参数有关。不失一般性,取 5~30 mm 分别作为动平台半边长和移动副初始长度的变化范围,均以 5 mm 作为变化步长,依次获取每种结构参数所对应的最大许可初值偏差,仿真结果如图 12 所示。其中黄色代表 N-R 法,蓝色代表 Broyden 法。



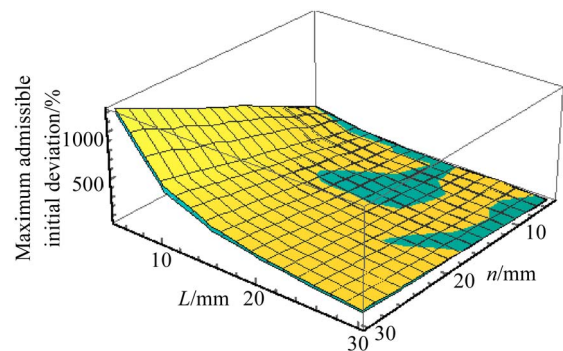
(a) 驱动模式 I ( $R=5$ )  
(a) Driving mode I ( $R=5$ )



(b) 驱动模式 II ( $R=4$ )  
(b) Driving mode II ( $R=4$ )



(c) 驱动模式 III ( $R=3$ )  
(c) Driving mode III ( $R=3$ )



(d) 驱动模式 IV ( $R=2$ )  
(d) Driving mode IV ( $R=2$ )

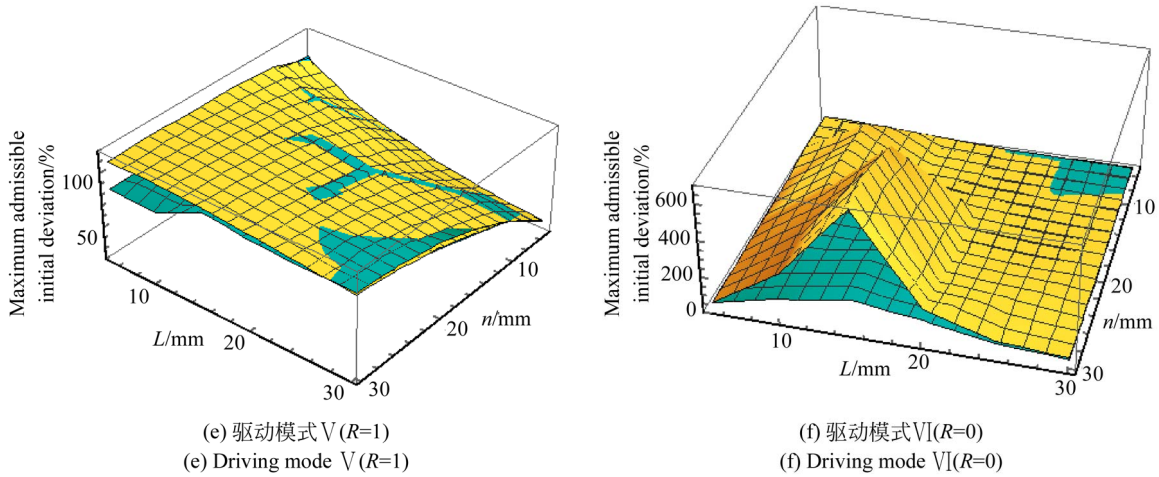


图 12 结构参数与最大许可初值偏差的关系

Fig. 12 Relationship between structural parameters and maximum admissible initial deviation

观察并分析图 12 可知：

(1)从整体趋势来看,随着动平台边长的增大和移动副初始长度的减小,最大许可初值偏差呈上升趋势。

(2)R=5 时,最大许可初值偏差的区间宽度都较小,分别为 19%和 0%,此时,最大许可初值偏差对结构参数变化的敏感程度较低;R=2 时,最大许可初值偏差的区间宽度都较大,分别为 1 218%和 1 174%,此时,最大许可初值偏差对结构参数变化的敏感程度较高,即在该驱动模式下,通过合理选取结构参数,能够增大冗余协调算法的最大许可初值偏差。

(3)R=0 时,最大许可初值偏差在移动副初始长度为 15 mm 左右出现凸峰,究其原因,这可能是由于算法在计算 Jacobian 矩阵时较易产生奇异所导致。

为了进一步定量地对比驱动模式对冗余协调算法产生的影响,运用区间分析理论,引入并定义扰动适应性能评价指标,将 6 种驱动模式下的扰动适应性能的平均值作为对应算法的综合扰动适应性能。扰动适应性能的表达式为：

$$P = \frac{\bar{I} - \underline{I}}{V}, \quad (33)$$

式中： $I$  为最大许可初值偏差区间； $\underline{I}$  和  $\bar{I}$  分别为区间  $I$  的下界和上界； $V$  为在相同冗余度的情况下,不同结构参数所对应的最大许可初值偏差的平均值。

显然,扰动适应性能  $P$  值越小,表明冗余协

调算法的抗扰动性能越强。表 6 列出了不同驱动模式下冗余协调算法的扰动适应性能。

表 6 冗余协调算法的扰动适应性能对比

Tab. 6 Comparison of perturbation adaptive performance of redundant coordination algorithm

| 驱动模式 (R) | 扰动适应性能 P/1 |         |
|----------|------------|---------|
|          | N-R        | Broyden |
| I (5)    | 0.36       | 0       |
| II (4)   | 2.05       | 1.84    |
| III (3)  | 0.60       | 0.43    |
| IV (2)   | 4.39       | 4.54    |
| V (1)    | 0.91       | 1.00    |
| VI (0)   | 5.08       | 2.76    |
| 综合扰动适应性能 | 2.23       | 1.76    |

观察并分析表 6 可知：

(1)冗余度为 1,3,5 时,冗余协调算法的抗扰动性能较强,即最大许可初值偏差对结构参数变化的敏感程度较低,从移动副的布局方式来看,冗余度为奇数时,至少存在 1 个二重复合球铰链,其两端连接的移动副由驱动副和从动副混连构成,该构成形式能够实现冗余协调算法的扰动补偿。

(2)特别地,当 R=5 时,Broyden 法的扰动适应性能为 0,在该驱动模式下,结构参数的变化对最大许可初值偏差不产生影响。从综合扰动适应性能来看,Broyden 法优于 N-R 法 1.27 倍,即

Broyden 法的抗扰动性能较优。

## 5 结 论

以具有解析式正解的 Stewart 衍生拓扑构型为研究对象,为了降低机构的耦合度,发明了一种二重复合球铰链,还给出了可转换主动、从动模式的移动副的一种设计方案,该移动副可以改变机构的冗余度,从而实现驱动模式的切换。构造了位置正解全解析算法,并验证了位置正解模型的正确性,该方法同样适用于动平台上含 3 个以上二重复合球面副、球铰中心不局限于动平台棱边中点且耦合度小于 2 的台体型并联机构位置正解的求解。

根据位置点之间的几何关系推导并化简了 6

个位移输入协调方程,分别对比分析了 N-R 法和 Broyden 法的数值性态,研究发现,N-R 法的精度优于 Broyden 法至少 3 倍,Broyden 法的计算时间约为 N-R 法的 78%,Broyden 法的综合扰动适应性性能优于 N-R 法的 1.27 倍。同时,研究了许可初值偏差和结构参数对冗余协调算法的影响。

Stewart 衍生型并联机构在具体应用场合需要合理选取驱动模式,其选取原则为:要允许有较大的最大许可初值偏差时,最佳冗余度为 3;要使最大许可初值偏差对结构参数变化较敏感时,最佳冗余度为 2;对实时性和抗扰动性能要求较高时,最佳冗余度为 5。

本文仅讨论了 N-R 法和 Broyden 法的数值性态,对于其他算法是否会得到不同结论,该问题将另文研究。

### 参考文献:

- [1] STEWART D. A platform with six degrees of freedom[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering*, 1965, 180(15): 371-386.
- [2] 赵裕明,金振林. 含有冗余支链的 3-RPS/3 $\pi$ -SPS 并联机构逆动力学建模[J]. *光学精密工程*, 2019, 27(4): 807-819.  
ZHAO Y M, JIN ZH L. Inverse dynamics modeling of 3-RPS/3 $\pi$ -SPS parallel mechanism with redundant limbs[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2019, 27(4): 807-819. (in Chinese)
- [3] DINÇER Ü, ÇEVİK M. Improved trajectory planning of an industrial parallel mechanism by a composite polynomial consisting of Bézier curves and cubic polynomials [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, 132: 248-263.
- [4] 卢启鹏,李勇军,彭忠琦,等. 六杆并联机构运动学正解研究及其在同步辐射光束线中的应用[J]. *光学精密工程*, 2008, 16(10): 1874-1879.  
LU Q P, LI Y J, PENG ZH Q, et al.. Forward kinematics of six-bar parallel mechanism and its applications in synchrotron radiation beam-line [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(10): 1874-1879. (in Chinese)
- [5] DINH T Q, YOON J I, MARCO J, et al.. Sensorless force feedback joystick control for teleoperation of construction equipment [J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2017, 18(7): 955-969.
- [6] YOU J J, YE P D, CHELLALI R, et al.. Forward kinematics and compatibility equations of a joystick based on a 12-6 Stewart redundant parallel mechanism [C]//RO-MAN 2018-27th IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication, Nanjing, 2018: 928-933.
- [7] 沈惠平,许可,杨廷力,等. 一种非全对称低耦合度三平移—转动并联机构的设计及其运动学[J]. *中国机械工程*, 2018, 29(2): 166-176.  
SHEN H P, XU K, YANG T L, et al.. Design and kinematics for a not-fully symmetric 3T1R parallel mechanism with low coupling-degrees [J]. *China Mechanical Engineering*, 2018, 29(2): 166-176. (in Chinese)
- [8] 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.  
HUANG ZH, ZHAO Y SH, ZHAO T SH. *Advanced Spatial Mechanism* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [9] 强红宾,王力航,姜雪,等. 基于调整步长牛顿法的 Stewart 并联机构位置正解[J]. *光学精密工程*, 2018, 26(12): 2982-2990.  
QIANG H B, WANG L H, JIANG X, et al.. Forward kinematics of Stewart parallel manipulator based on step-adjusting Newton method [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2018, 26(12): 2982-2990. (in Chinese)
- [10] 张英,廖启征,魏世民. 一般 6-4 台体型并联机构位置正解分析[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(9):

- 26-32. ZHANG Y, LIAO Q ZH, WEI SH M. Forward displacement analysis of a general 6-4 in-parallel platform [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(9): 26-32. (in Chinese)
- [11] 黄昔光, 廖启征, 魏世民, 等. 一般 6-6 型平台并联机构位置正解代数消元法 [J]. *机械工程学报*, 2009, 45(1): 56-61.  
HUANG X G, LIAO Q ZH, WEI SH M, *et al.*. Forward kinematics analysis of the general 6-6 platform parallel mechanism based on algebraic elimination [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(1): 56-61. (in Chinese)
- [12] WEI F, WEI SH M, ZHANG Y, *et al.*. Algebraic solution for the forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 29(1): 56-62.
- [13] 姜虹, 贾嵘, 董洪智, 等. 六自由度并联机器人位置正解的数值解法 [J]. *上海交通大学学报*, 2000, 34(3): 351-353.  
JIANG H, JIA R, DONG H ZH, *et al.*. Positional solution of a six-degree of freedom parallel robot [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2000, 34(3): 351-353. (in Chinese)
- [14] 薛剑, 唐志勇, 裴忠才. 6-3 Stewart 平台位置正解的机构简化数值方法 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2014, 40(7): 921-926.  
XUE J, TANG ZH Y, PEI ZH C. Numerical method of forward position solution for 6-3 Stewart platform based on mechanism simplification [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2014, 40(7): 921-926. (in Chinese)
- [15] 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解 [J]. *机械工程学报*, 2015, 51(9): 28-36.  
GENG M CH, ZHAO T SH, WANG CH, *et al.*. Direct position analysis of parallel mechanism based on quasi-Newton method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(9): 28-36. (in Chinese)
- [16] YANG X L, WU H T, LI Y, *et al.*. A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or redundant actuation [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 107: 27-36.
- [17] 叶鹏达, 尤晶晶, 沈惠平, 等. 6 支链台体型 Stewart 衍生构型位置正解半解析算法 [J]. *农业机械学报*, 2019, 50(4): 393-400.  
YE P D, YOU J J, SHEN H P, *et al.*. Semi-analytic algorithm for forward displacement analysis of six links Stewart derivative configurations [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2019, 50(4): 393-400. (in Chinese)
- [18] KIM J S, JEONG Y H, PARK J H. A geometric approach for forward kinematics analysis of a 3-SPS/S redundant motion manipulator with an extra sensor using conformal geometric algebra [J]. *Meccanica*, 2016, 51(10): 2289-2304.
- [19] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究 [J]. *机械工程学报*, 2013, 49(21): 70-80.  
SHEN H P, YIN H B, WANG ZH, *et al.*. Research on forward position solutions for 6-SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(21): 70-80. (in Chinese)
- [20] 刘晓飞, 姚建涛, 赵永生. 基于模型的冗余驱动并联机构神经网络同步协调控制 [J]. *农业机械学报*, 2018, 49(2): 367-375.  
LIU X F, YAO J T, ZHAO Y SH. Model-based synchronous control of redundantly actuated parallel manipulator with neural network [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2018, 49(2): 367-375. (in Chinese)
- [21] 尤晶晶, 符同舟, 吴洪涛, 等. 12-6 台体型 Stewart 冗余并联机构正向运动学研究 [J]. *农业机械学报*, 2017, 48(12): 395-402.  
YOU J J, FU ZH ZH, WU H T, *et al.*. Forward kinematics of general 12-6 Stewart redundant parallel mechanism [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2017, 48(12): 395-402. (in Chinese)
- [22] 周鑫, 许允斗, 姚建涛, 等. 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机构的内力分析与协调 [J]. *中国机械工程*, 2016, 27(6): 711-717.  
ZHOU X, XU Y D, YAO J T, *et al.*. Internal force analysis and coordination of a 5-UPS/PRPU redundantly actuated parallel mechanism [J]. *China Mechanical Engineering*, 2016, 27(6): 711-717. (in Chinese)
- [23] NOURI R A B, FARID M, MAHZOON M. Redundancy resolution and control of a novel spatial parallel mechanism with kinematic redundancy [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, 133:

- 112-126.
- [24] SCHREIBER L T, GOSELIN C. Exploiting the kinematic redundancy of a (6+3) degrees-of-freedom parallel mechanism[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2019, 11(2):1-18.
- [25] 尤晶晶, 尤天宇. 一种复合球铰链[P]. 南京林业大学, CN110039570A, 2019-07-23.
- YOU J J, YOU T Y. A kind of composite spherical pair. Nanjing Forestry University, CN110039570A [P]. 2019-07-23. (in Chinese)
- [26] 尤晶晶, 仇鑫, 王林康, 等. 一种可以转换主、从移动的运动副[P]. 南京林业大学, CN110159718A, 2019-08-23.
- YOU J J, QIU X, WANG L K, *et al.*. A kind of convertible master-slave output prismatic pair. Nanjing Forestry University, CN110159718A [P]. 2019-08-23. (in Chinese)
- [27] 李庆扬, 莫筱中, 祁力群. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- LI Q Y, MO Z ZH, QI L Q. *Numerical Solution of the Nonlinear Equations*[M]. Beijing: Science Press, 1987. (in Chinese)

#### 作者简介:



叶鹏达(1994—),男,江苏溧阳人,博士研究生,2017年于南京林业大学获得学士学位,主要从事并联机器人运动学与动力学的研究。E-mail: yepengda@126.com

#### 导师简介:



尤晶晶(1985—),男,江苏南通人,副教授,硕士生导师,2010年、2013年于南京航空航天大学分别获得硕士、博士学位,主要从事并联机器人和六维加速度传感器等方面的研究。E-mail: youjingjing251010@126.com

(本栏目编辑:秦 思)